

Тема 2: «Моделирование кинематики плоского движения механизма»

Объектом изучения является плоский механизм с шарнирными соединениями звеньев. Каждое звено в отдельности будем называть плоской фигурой.

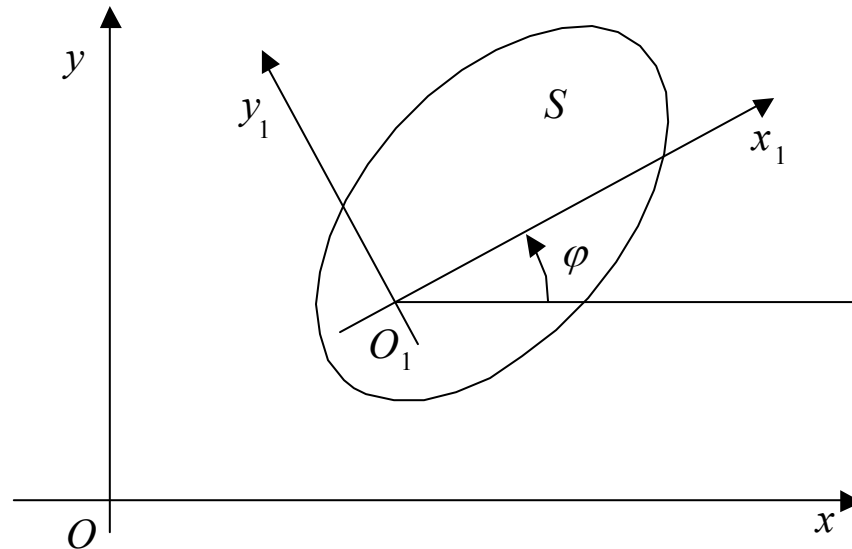


Рис. 2.1

Чтобы определить положение плоской фигуры в плоскости ее движения, или, иными словами, определить положение подвижной системы координат $O_1x_1y_1$, связанной с фигурой, относительно неподвижной системы Oxy , достаточно задать координаты x_{01} , y_{01} точки O_1 и угол φ между подвижной осью O_1x_1 и неподвижной Ox (Рис. 2.1). Поэтому **уравнения плоского движения** можно записать в виде

$$x_{01} = f(t), \quad y_{01} = g(t), \quad \varphi = h(t), \quad (2.1)$$

Частные случаи плоского движения.

1. Если $\varphi = \text{const}$, то с течением времени изменяются только координаты полюса O_1 , а подвижные оси остаются параллельными самим себе. Фигура S совершает **плоское поступательное** движение.
2. Если $x_{01} = \text{const}$, $y_{01} = \text{const}$, то есть полюс неподвижен, и в процессе движения фигуры меняется только угол φ . Плоская фигура в этом случае совершает **вращательное движение** вокруг оси O_1z_1 , перпендикулярной плоскости фигуры.

Для определения скоростей точек плоской фигуры будет применяться **теорема Эйлера**:

Всякое мгновенное движение плоской фигуры в ее плоскости приводится к **мгновенно-поступательному** движению фигуры вместе с полюсом O_1 и **мгновенно-вращательному** движению вокруг этого полюса

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_{O_1} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_1]. \quad (2.2)$$

Здесь \mathbf{v}_M – вектор скорости любой точки M плоской фигуры, \mathbf{v}_{O_1} – скорость полюса, $[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_1] = \mathbf{v}_{M/O_1}$ – вектор скорости точки M во вращательном

движении фигуры вокруг оси O_1z_1 , ω – вектор угловой скорости этого вращения (Рис. 2.2).

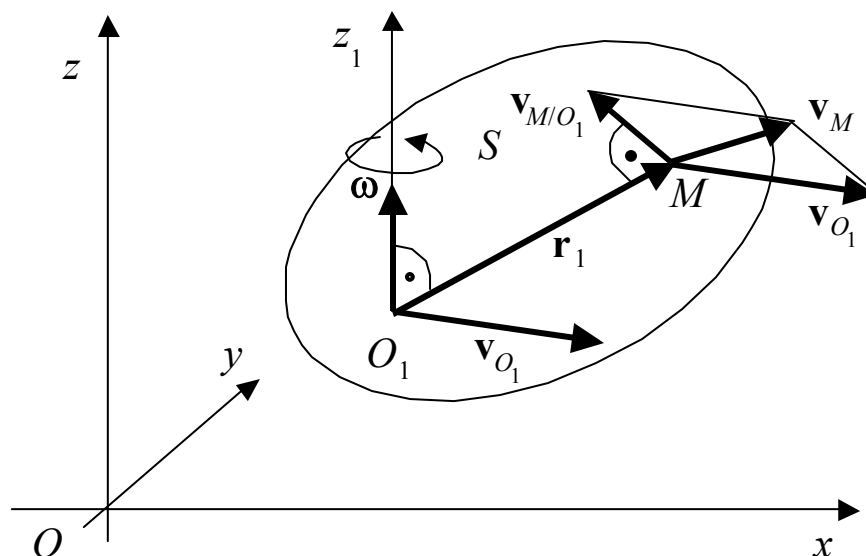


Рис. 2.2

Так как угол между векторами ω и \mathbf{r}_1 прямой, то

$$|\mathbf{v}_{M/O_1}| = |[\omega, \mathbf{r}_1]| = \omega \cdot r_1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \omega \cdot r_1.$$

Таким образом, скорость какой-либо точки фигуры при ее плоском движении равна векторной сумме скорости полюса и скорости этой точки при вращении фигуры вокруг полюса.

В любой момент времени существует единственная точка фигуры, скорость которой равна нулю. Эта точка называется **мгновенным центром скоростей** (МЦС). Обозначим ее буквой P . Если эту точку выбирать в качестве полюса, то в формуле (2.2) первое слагаемое правой части равно нулю. Таким образом, скорости точек плоской фигуры в данный момент времени вычисляются так же, как если бы фигура вращалась вокруг точки P (вернее – вокруг неподвижной оси, проходящей через МЦС, перпендикулярно плоскости движения) с угловой скоростью ω .

Использование МЦС значительно упрощает определение скоростей точек твердого тела в плоском движении. На Рис. 2.3 (а) – (д) изображены различные случаи определения МЦС:

- (а) Известны направления скоростей двух точек A и B фигуры. МЦС находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных в точках A и B к направлениям скоростей \mathbf{v}_A и \mathbf{v}_B .

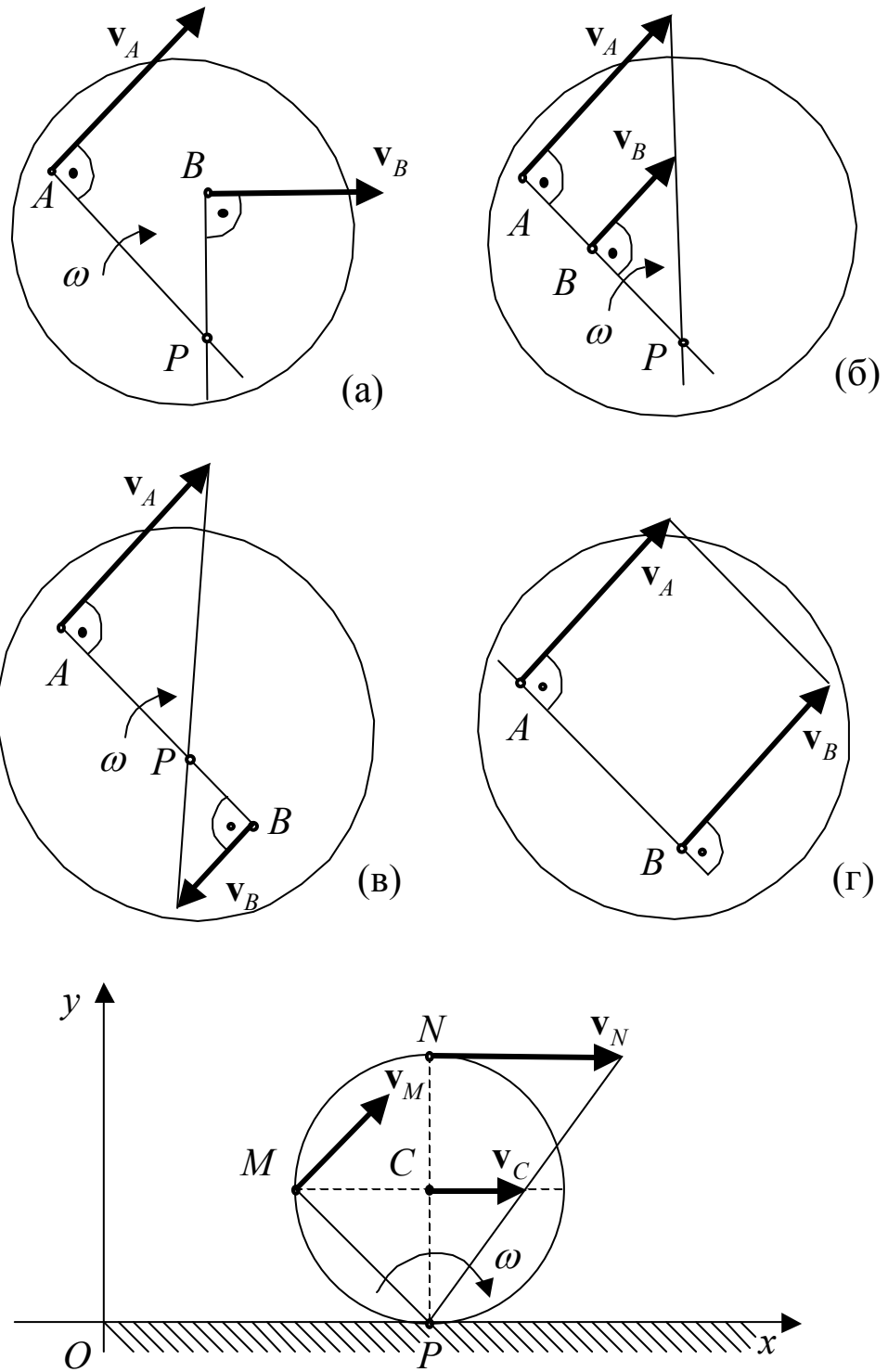


Рис. 2.3

- (б), (в) v_A и v_B лежат на одном перпендикуляре к неравным скоростям. МЦС находится в точке пересечения этого перпендикуляра с прямой, соединяющей концы векторов скоростей точек A и B .
- г) Скорости двух точек A и B параллельны, направлены в одну сторону и равны между собой. МЦС лежит в бесконечности, мгновенная угловая скорость плоской фигуры равна нулю. Движение является мгновенно-поступательным.

д) При качении без скольжения плоской фигуры по неподвижной плоской линии МЦС находится в точке их контакта.

Итак, скорости всех точек плоской фигуры распределены в каждый момент времени так, как если бы движение фигуры было чистым вращением вокруг МЦС. Поэтому МЦС называется также **мгновенным центром вращения**.

Мгновенный центр вращения P меняет свое положение как на неподвижной плоскости Oxy , относительно которой движется фигура, так и на связанной с этой фигурой подвижной плоскости.

Геометрическое место мгновенных центров вращения на неподвижной плоскости называется **неподвижной центроидой**. На подвижной плоскости те же центры описывают **подвижную центроиду**.

В каждый момент времени эти две центроиды касаются в точке P , скорость которой равна нулю. Таким образом, движение плоской фигуры может быть представлено как качение без скольжения подвижной центроиды по неподвижной.

Задача

Для каждого из механизмов (Табл. 2.2) заданы: начальное положение всех звеньев, геометрические характеристики, величина постоянной угловой скорости ведущего звена (кривошипа) $\omega_1 = 1 \text{ рад/с}$. Все исходные числовые данные оформлены в виде таблицы 2.1. Кроме того, для всех вариантов длину первого звена полагаем одинаковой $l_1 = 0,5 \text{ м}$.

Требуется составить дифференциальные уравнения движения механизма и исследовать их с помощью ЭВМ. Произвести проверку решения графо-аналитическим методом. Результаты решения представить в виде аналитических расчетов, таблиц и графиков.

Последовательность выполнения задачи

1. Описать принцип работы механизма.
2. Записать для данного механизма уравнения геометрических связей, задаваемых в виде ограничений, налагаемых на координаты некоторых точек. Таких уравнений для каждого механизма должно быть три – по количеству неизвестных, которые из них предстоит определить.
3. Продифференцировать уравнения связей по времени. Получится система уравнений, линейная относительно угловых скоростей звеньев, составляющих механизм.
4. Разрешить систему уравнений связей относительно $\omega_2, \omega_3, \omega_4$. Для решения использовать правило Крамера. Система дифференциальных уравнений связей приобретет нормальную форму Коши:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_2 &= \omega_2(t, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4), \\ \dot{\varphi}_3 &= \omega_3(t, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4), \\ \dot{\varphi}_4 &= \omega_4(t, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4).\end{aligned}\tag{2.3}$$

Уравнения (2.3) образуют систему дифференциальных уравнений, интегрированием которой при заданных начальных условиях $\varphi_2(0) =$

$\varphi_{20}, \varphi_3(0) = \varphi_{30}, \varphi_4(0) = \varphi_{40}$ решается кинематическая задача о движении плоского механизма. Начальные условия для каждого варианта заданы в Табл. 2.1.

5. Записать выражение для переменной координаты точки C . Продифференцировать это выражение по времени и получить кинематическое уравнение в виде

$$v_C = v_C(t, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \omega_2, \omega_3, \omega_4).$$

Подставляя в это выражение значения $\omega_2, \omega_3, \omega_4$, из системы (2.3) получить скорость в виде

$$v_C = v_C(t, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4). \quad (2.4)$$

6. Численно проинтегрировать систему (2.3) на отрезке $[0, 2\pi]$ при заданных начальных условиях $\varphi_2(0), \varphi_3(0), \varphi_4(0)$.
7. Если результаты моделирования кинематики свидетельствуют о разрывном характере движения, что обнаруживается при анализе графиков угловых скоростей, то следует установить причины, препятствующие полной прокручиваемости механизма. Меняя геометрию механизма и начальные данные, обеспечить непрерывность решения системы (2.3) на всем отрезке $0 \leq t \leq 2\pi$.
8. Вывести результаты интегрирования не только в виде таблиц, но и в виде графиков. Если механизм допускает полное прокручивание для $0 \leq t \leq 2\pi$, то последняя строка таблиц должна с небольшой погрешностью повторять первую. Дополнительно, при помощи соотношения (2.4) получить зависимость $v_C(t)$.
9. Используя таблицы результатов интегрирования получить значения углов поворота звеньев, их угловых скоростей и скорости точки C для момента времени $t = \pi/2$. Выполнить проверку численного решения графо-аналитическим методом, изобразив механизм на одном чертеже для двух моментов времени при $t = 0, \pi/2$. Для обоих положений найти МЦС всех звеньев, изобразить векторы скоростей точек соединения звеньев, указать ориентации вращения звеньев. Сравнить результаты графо-аналитического метода для $t = \pi/2$ с численными результатами.

Пример выполнения задания

Кривошип OA , вращающийся с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 1$ рад/с, приводит в движение с помощью шатуна AC ползун C , совершающий возвратно-поступательное движение. К ползуну шарнирно присоединен шатун CB , сообщающий вращательное движение кривошипу BD вокруг неподвижной точки D (Рис. 2.4).

Заданы длины звеньев: $l_1 = 0,5$ м, $l_2 = 1$ м, $l_3 = 1,2$ м, $l_4 = 0,8$ м. При $t = 0$ заданы также начальные данные движения механизма: $\varphi_1(0) = 0, \varphi_2(0) = 0,5, \varphi_3(0) = 4,7, \varphi_4(0) = 5,7$.

Требуется составить дифференциальные уравнения движения механизма, позволяющие вычислить в виде функций от времени углы поворота звеньев, их угловые скорости и скорость точки C . Следует также

вычислить на ЭВМ на отрезке времени $[0, 2\pi]$ решение полученной системы дифференциальных уравнений. Построить графики функций $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$, $\omega_4(t)$, $v_C(t)$. Выполнить анализ прокручиваемости механизма в соответствии с пунктом 7 последовательности выполнения задачи. Для момента времени $t = 1$ с определить при помощи графо-аналитического метода скорость точки C и угловые скорости звеньев $\omega_2(1)$, $\omega_3(1)$, $\omega_4(1)$. Результаты сравнить с выходными данными численного интегрирования системы дифференциальных уравнений.

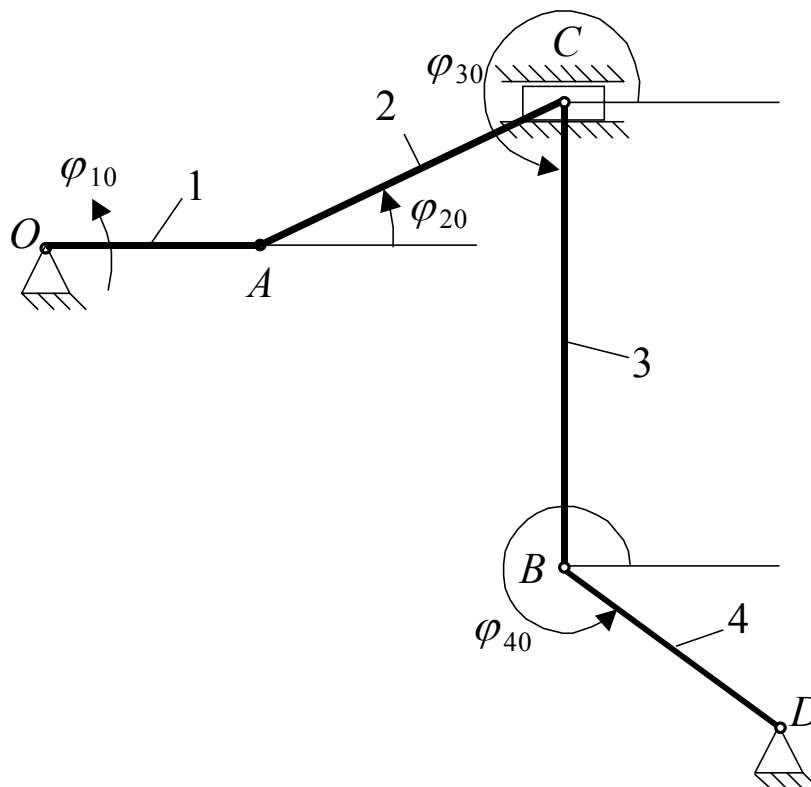


Рис. 2.4

Решение

1. Механизм состоит из четырех подвижных звеньев: OA , AC , CB , BD . Соответствующие номера указаны на чертеже. Кроме этого, имеется одно неподвижное, базовое, звено, относительно которого отсчитывается движение остальных, подвижных звеньев. Присвоим этому звену нулевой номер. Перечислим связи между звеньями: в точке O — шарнирная связь между 0-м и 1-м, в точке A — шарнирная связь между 1-м и 2-м, в точке B — шарнирная связь между 3-м и 4-м, в точке D — шарнирная связь между 4-м и 0-м. В точке C имеется составная связь: шарнир между 2-м и 3-м звеньями, гладкая (горизонтальная) поверхность базового тела, по которой может двигаться точка C тела 2 (или тела 3).
2. Анализируя работу механизма, записываем уравнения геометрических связей, наложенных на точки C и D :

$$y_C = C_1, \quad x_D = C_2, \quad y_D = C_3.$$

Выражаем эти координаты через длины звеньев и углы φ_1 , φ_2 , φ_3 , φ_4

$$\begin{aligned}
y_C &= l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 = C_1, \\
x_D &= l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_3 + l_4 \cos \varphi_4 = C_2, \\
y_D &= l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 + l_3 \sin \varphi_3 + l_4 \sin \varphi_4 = C_1 + l_3 \sin \varphi_3 + l_4 \sin \varphi_4 = C_3.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

3. Продифференцируем систему (2.5) по времени:

$$\begin{aligned}
\omega_1 l_1 \cos \varphi_1 + \omega_2 l_2 \cos \varphi_2 &= 0, \\
-\omega_1 l_1 \sin \varphi_1 - \omega_2 l_2 \sin \varphi_2 - \omega_3 l_3 \sin \varphi_3 - \omega_4 l_4 \sin \varphi_4 &= 0, \\
\omega_3 l_3 \cos \varphi_3 + \omega_4 l_4 \cos \varphi_4 &= 0.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

4. Подставляем в (2.6) $\varphi_1 = t$, $\omega_1 = 1$ и переписываем известные члены в правую часть уравнений. Получим систему из трех линейных алгебраических уравнений относительно величин ω_2 , ω_3 , ω_4

$$\begin{aligned}
(l_2 \cos \varphi_2) \omega_2 &= -l_1 \cos t \\
(l_2 \sin \varphi_2) \omega_2 + (l_3 \sin \varphi_3) \omega_3 + (l_4 \sin \varphi_4) \omega_4 &= -l_1 \sin t \\
(l_3 \cos \varphi_3) \omega_3 + (l_4 \cos \varphi_4) \omega_4 &= 0
\end{aligned}$$

Записываем эту систему в матричном виде

$$\begin{pmatrix} l_2 \cos \varphi_2 & 0 & 0 \\ l_2 \sin \varphi_2 & l_3 \sin \varphi_3 & l_4 \sin \varphi_4 \\ 0 & l_3 \cos \varphi_3 & l_4 \cos \varphi_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_1 \cos t \\ -l_1 \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Решаем систему уравнений по правилу Крамера при помощи формул

$$\omega_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \omega_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad \omega_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta},$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} l_2 \cos \varphi_2 & 0 & 0 \\ l_2 \sin \varphi_2 & l_3 \sin \varphi_3 & l_4 \sin \varphi_4 \\ 0 & l_3 \cos \varphi_3 & l_4 \cos \varphi_4 \end{vmatrix} = l_2 \cos \varphi_2 \begin{vmatrix} l_3 \sin \varphi_3 & l_4 \sin \varphi_4 \\ l_3 \cos \varphi_3 & l_4 \cos \varphi_4 \end{vmatrix} = \\
&= l_2 l_3 l_4 (\sin \varphi_3 \cos \varphi_4 - \cos \varphi_3 \sin \varphi_4) \cos \varphi_2 = l_2 l_3 l_4 \sin(\varphi_3 - \varphi_4) \cos \varphi_2, \\
\Delta_2 &= \begin{vmatrix} -l_1 \cos t & 0 & 0 \\ -l_1 \sin t & l_3 \sin \varphi_3 & l_4 \sin \varphi_4 \\ 0 & l_3 \cos \varphi_3 & l_4 \cos \varphi_4 \end{vmatrix} = -l_1 \cos t \begin{vmatrix} l_3 \sin \varphi_3 & l_4 \sin \varphi_4 \\ l_3 \cos \varphi_3 & l_4 \cos \varphi_4 \end{vmatrix} = \\
&= -l_1 l_3 l_4 (\sin \varphi_3 \cos \varphi_4 - \cos \varphi_3 \sin \varphi_4) \cos t = -l_1 l_3 l_4 \sin(\varphi_3 - \varphi_4) \cos t, \\
\Delta_3 &= \begin{vmatrix} l_2 \cos \varphi_2 & -l_1 \cos t & 0 \\ l_2 \sin \varphi_2 & -l_1 \sin t & l_4 \sin \varphi_4 \\ 0 & 0 & l_4 \cos \varphi_4 \end{vmatrix} = l_4 \cos \varphi_4 \begin{vmatrix} l_2 \cos \varphi_2 & -l_1 \cos t \\ l_2 \sin \varphi_2 & -l_1 \sin t \end{vmatrix} = \\
&= -l_1 l_2 l_4 (\sin t \cos \varphi_2 - \cos t \sin \varphi_2) \cos \varphi_4 = -l_1 l_2 l_4 \sin(t - \varphi_2) \cos \varphi_4,
\end{aligned}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} l_2 \cos \varphi_2 & 0 & -l_1 \cos t \\ l_2 \sin \varphi_2 & l_3 \sin \varphi_3 & -l_1 \sin t \\ 0 & l_3 \cos \varphi_3 & 0 \end{vmatrix} = -l_3 \cos \varphi_3 \begin{vmatrix} l_2 \cos \varphi_2 & -l_1 \cos t \\ l_2 \sin \varphi_2 & -l_1 \sin t \end{vmatrix} =$$

$$= l_1 l_2 l_3 (\sin t \cos \varphi_2 - \cos t \sin \varphi_2) \cos \varphi_3 = l_1 l_2 l_3 \sin(t - \varphi_2) \cos \varphi_3.$$

Получившиеся выражения для угловых скоростей позволяют составить систему дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_2 &= -\frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{\cos t}{\cos \varphi_2}, \\ \dot{\varphi}_3 &= -\frac{l_1}{l_3} \cdot \frac{\cos \varphi_4 \sin(t - \varphi_2)}{\cos \varphi_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_4)}, \\ \dot{\varphi}_4 &= \frac{l_1}{l_4} \cdot \frac{\cos \varphi_3 \sin(t - \varphi_2)}{\cos \varphi_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_4)}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

5. Для абсциссы точки C имеем выражение

$$x_C = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2. \quad (2.9)$$

Дифференцируя (2.9) по времени и подставляя вместо $\dot{\varphi}_2$ его значение из (2.8) получим выражение для v_C

$$\begin{aligned} v_C &= -l_1 \cdot 1 \cdot \sin t - l_2 \left(-\frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{\cos t}{\cos \varphi_2} \right) \sin \varphi_2 = \frac{l_1 (\sin \varphi_2 \cos t - \cos \varphi_2 \sin t)}{\cos \varphi_2} = \\ &= \frac{l_1 \sin(\varphi_2 - t)}{\cos \varphi_2}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

6. Проводим численное интегрирование системы дифференциальных уравнений (2.8). Для этого находим решение задачи Коши при заданных начальных условиях на отрезке времени $[0, 2\pi]$. Возможная методика вычислений на ЭВМ представлена в виде примера документа MathCAD в Приложении.

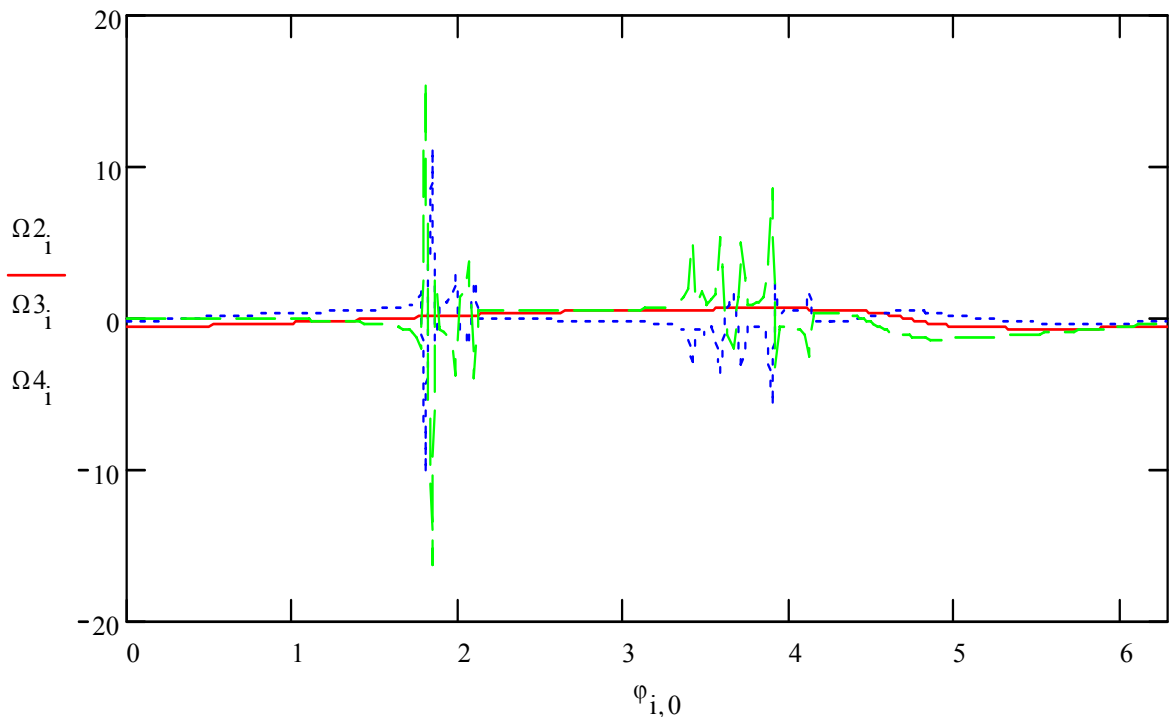


Рис. 2.5

На Рис. 2.5 показаны результаты интегрирования системы (2.8) при заданных начальных условиях. По оси абсцисс отложена переменная времени, а по оси ординат значения угловых скоростей звеньев 2, 3, 4 (для сравнения см. текст документа MathCAD в Приложении).

7. На графике Рис. 2.5 можно обнаружить, что на отрезке времени $1,5 \leq t \leq 2$ нарушается непрерывность решения. Эта ситуация свидетельствует о физической невозможности для механизма продолжать движение после момента разрыва. При помощи подбора значений начальных условий $\varphi_3(0)$, $\varphi_4(0)$ можно фактически изменить расположение точки D механизма таким образом, что препятствия полной прокручиваемости исчезнут. Для этого изменяем значения $\varphi_3(0) = 1,9$, $\varphi_4(0) = 3,5$. Результаты интегрирования представлены на Рис. 2.6, а получившийся механизм изображен на Рис. 2.7. Полная прокручиваемость подтверждается периодическим характером поведения функций угловых скоростей, что свидетельствует о возвращении механизма в его начальное положение.
8. При помощи выражения (2.10) получаем график зависимости $v_C(t)$, изображенный на Рис. 2.8. Из этого графика также видно, что функция $v_C(t)$ является периодической.

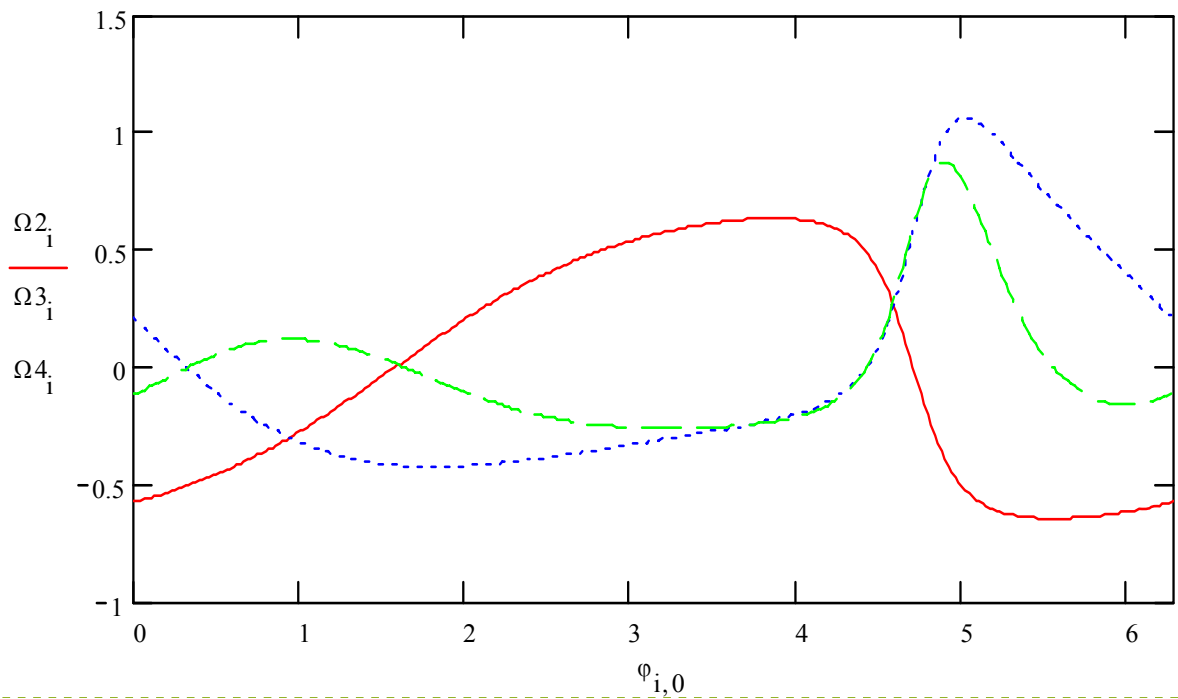


Рис. 2.6

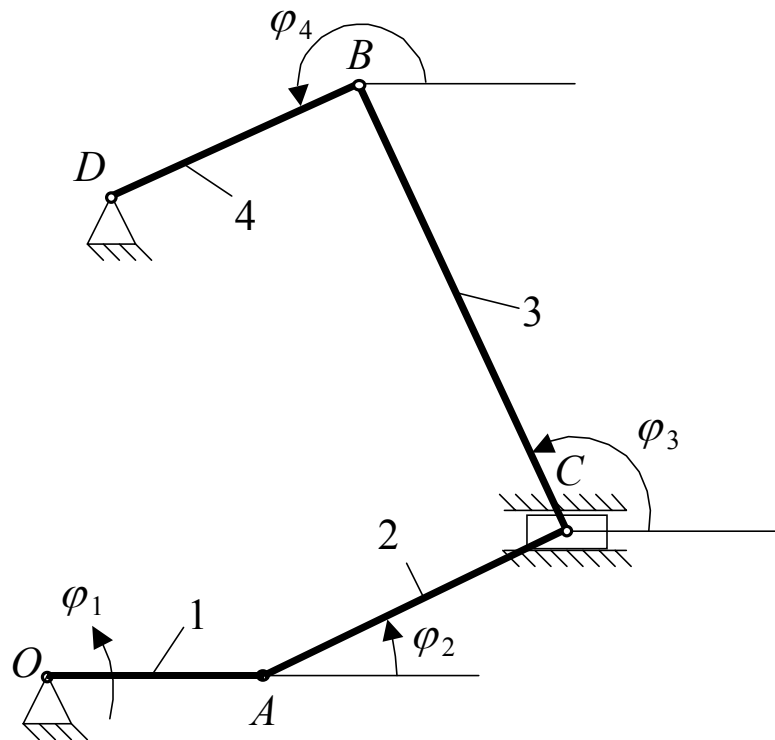


Рис. 2.7

9. Используя результаты численного интегрирования для момента времени $t = \pi/2 \approx 1,5708\text{с}$ выбираем значения углов поворота звеньев: $\varphi_{11} \approx 1,5708$, $\varphi_{21} \approx -0,021$, $\varphi_{31} \approx 1,602$, $\varphi_{41} \approx 3,587$, угловых скоростей: $\omega_{11} = 1\text{с}^{-1}$, $\omega_{21} = 0\text{с}^{-1}$, $\omega_{31} \approx -4,11\text{с}^{-1}$, $\omega_{41} \approx 0,021\text{с}^{-1}$, скорости точки C: $v_{C1} = -0,5\text{м/с}$. Проверяем полученные значения графо-аналитическим методом (Рис. 2.9). Для этого изображаем механизм сначала в начальном

положении при $t = 0$ ($OA_0B_0C_0D$), а затем используя неизменные геометрические параметры механизма (положение точки O , линия ползуна C , положение точки D) и новые углы поворота всех звеньев ($\varphi_{11}, \varphi_{21}, \varphi_{31}, \varphi_{41}$), строим его в заданном положении ($OA_1B_1C_1D$). Строим также мгновенные центры скоростей всех звеньев, когда это возможно, на пересечении перпендикуляров к векторам скоростей точек. Это точки P_{20}, P_{30} для начального положения механизма и P_{31} для его положения при $t = \pi/2$ с.

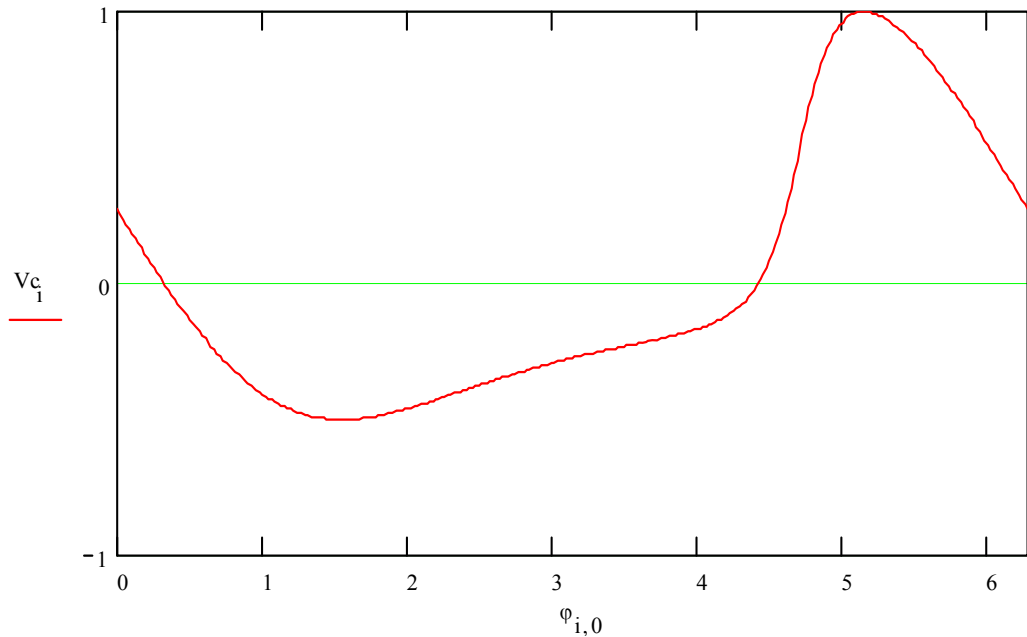


Рис. 2.8

Положения мгновенных центров скоростей помогают определить ориентации вращения всех звеньев в начальный и конечный моменты времени и направления скоростей точек C и B в эти моменты. МЦС звена 2 при $t = \pi/2$ с находится в бесконечности, т. к. v_{A1} параллельна v_{C1} , но не перпендикулярна положению A_1C_1 звена AC . Таким образом, $\omega_{21} = 0$ с⁻¹ и $v_{C1} = v_{A1} = -0,5$ м/с. Распределение скоростей звена 2 при $t = \pi/2$ с соответствует мгновенно-поступательному движению.

Для дальнейшего расчета рассматриваем треугольник $B_1C_1P_{31}$. По теореме синусов справедливы отношения

$$\frac{|v_{B1}|}{|v_{C1}|} = \frac{P_{31}B_1}{P_{31}C_1} = \frac{\sin 2^\circ}{\sin 114^\circ} = \frac{0,0349}{0,914} = 0,0382,$$

$$\frac{P_{31}C_1}{l_3} = \frac{\sin 114^\circ}{\sin 64^\circ} = \frac{0,914}{0,8988} = 1,016.$$

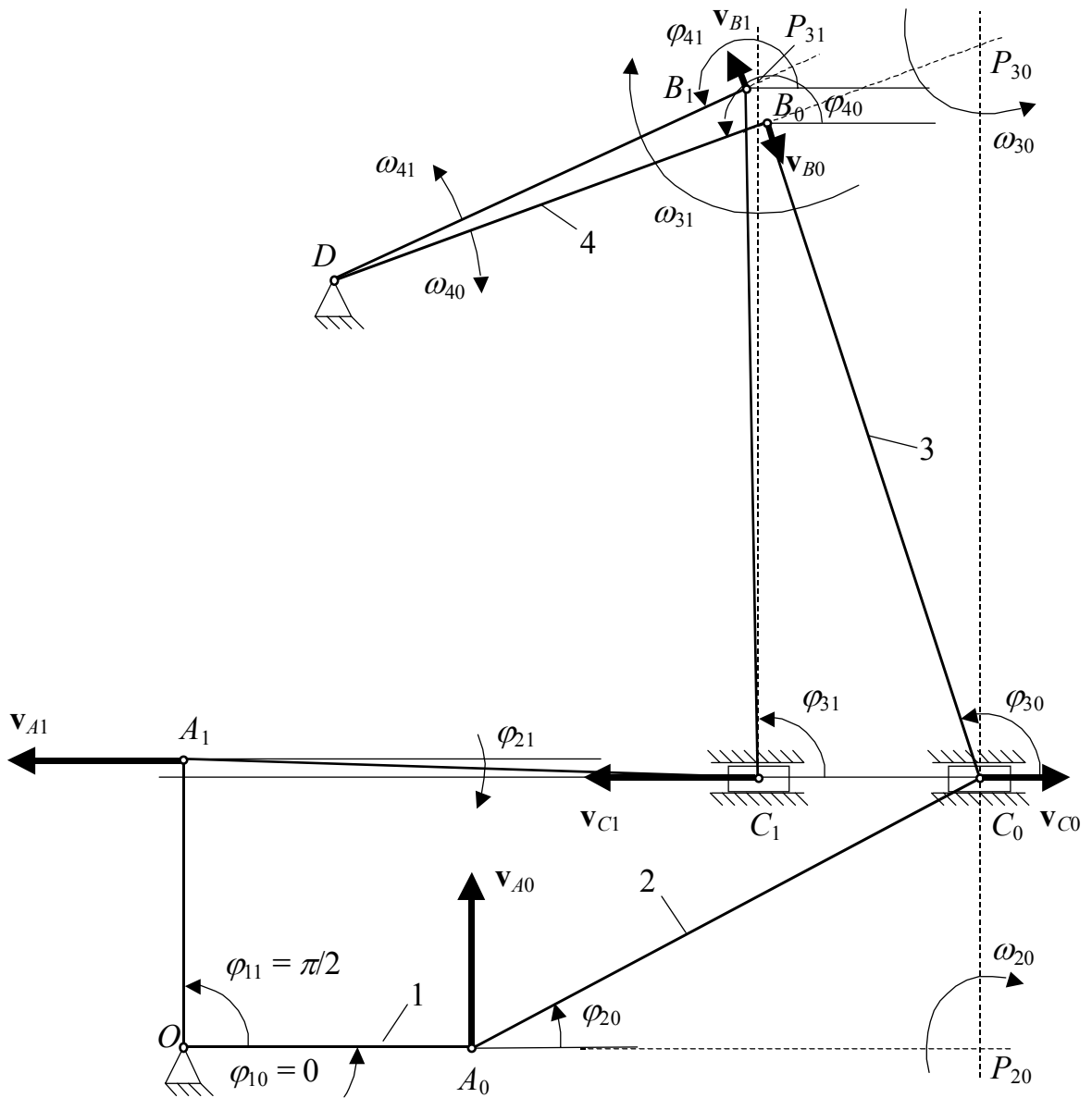


Рис. 2.9

Из этих соотношений находим $|v_{B1}| = |v_{C1}| \cdot 0,0382 = 0,0191(\text{м/с})$, $P_{31}C_1 = l_3 \cdot 1,016 = 1,2196(\text{м})$. Следовательно,

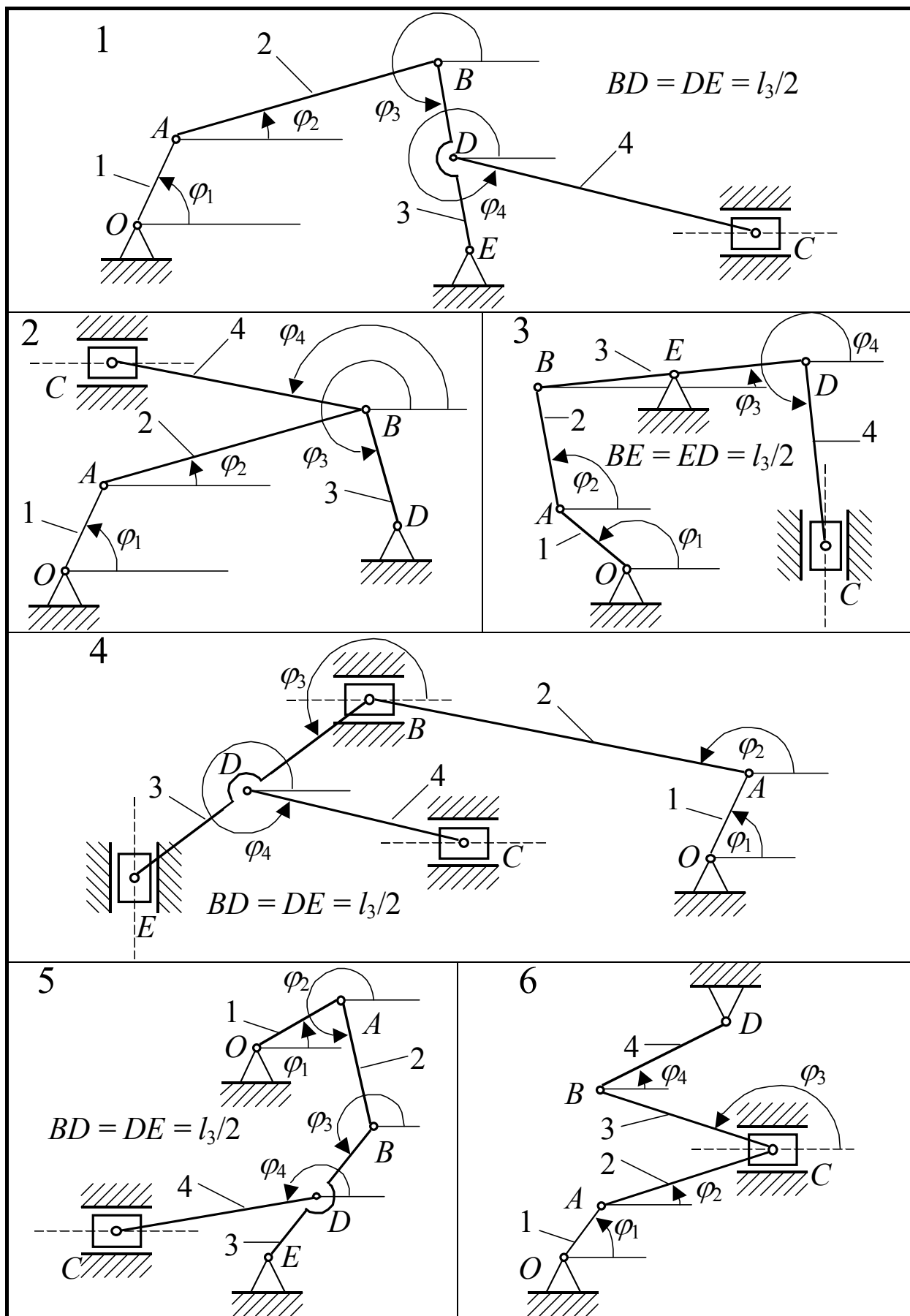
$$|\omega_{31}| = \frac{|v_{C1}|}{P_{31}C_1} = 0,41(\text{с}^{-1}), \quad |\omega_{41}| = \frac{|v_{B1}|}{l_4} = 0,024(\text{с}^{-1})..$$

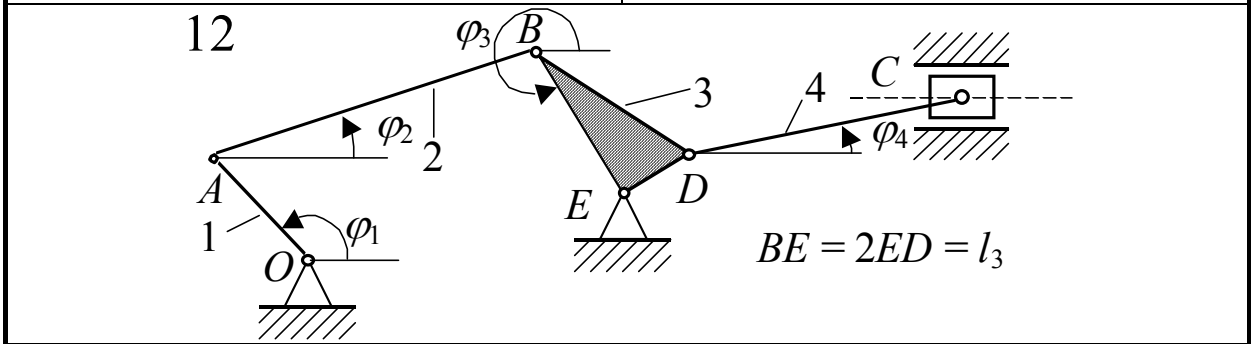
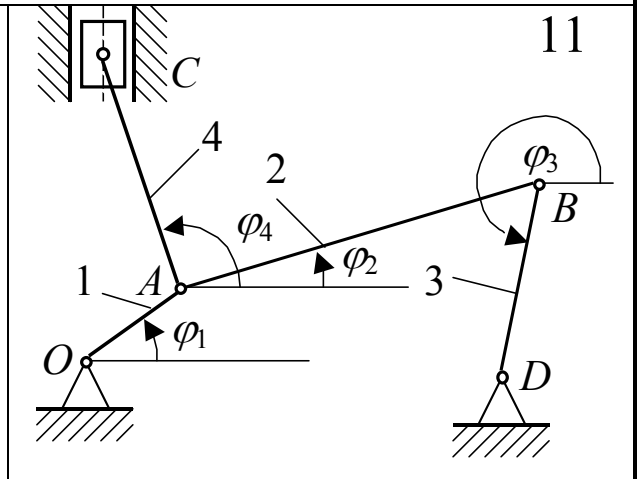
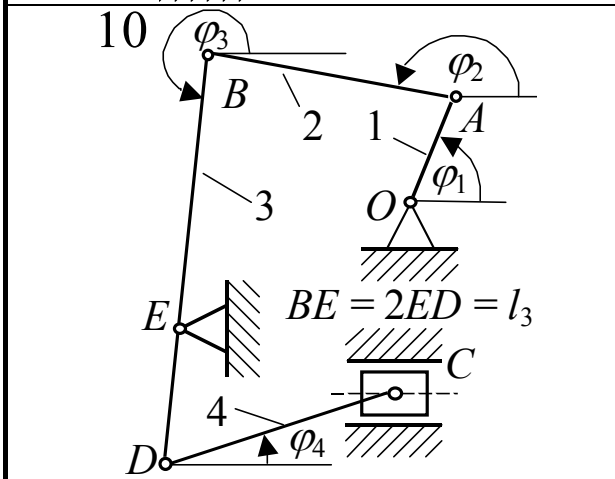
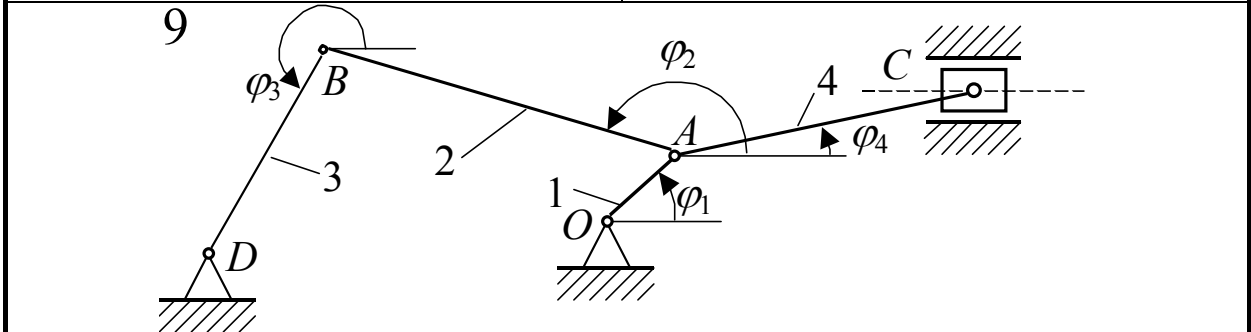
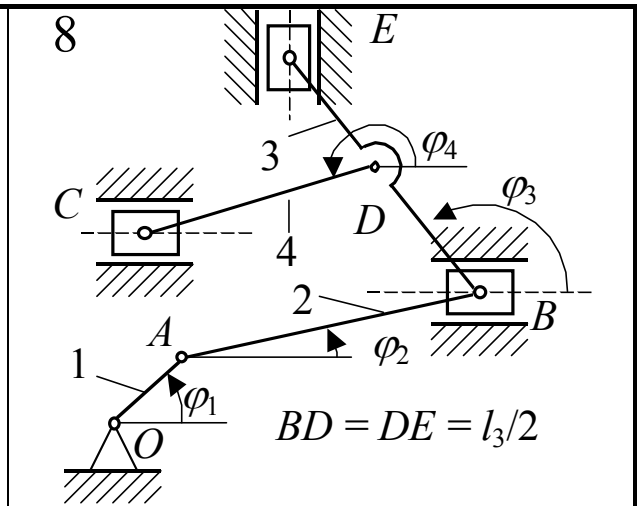
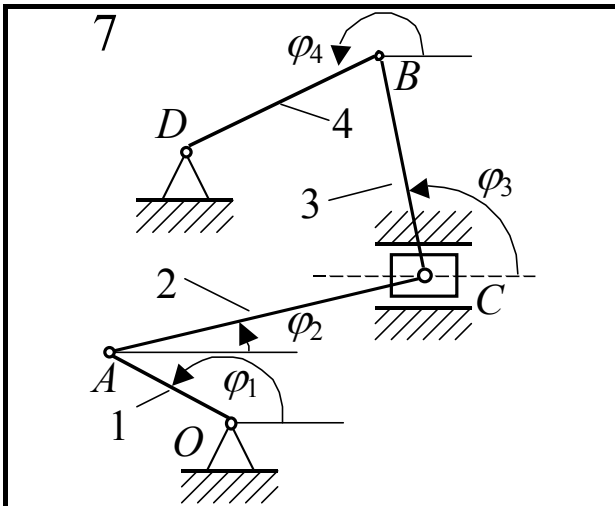
В Приложении при помощи интегрирования системы дифференциальных уравнений получены алгебраические значения этих величин. Отрицательный знак величины ω_3 соответствует вращению звена 3 по часовой стрелке. Таким образом, результаты графо-аналитического метода достаточно точно совпадают с вычисленными при помощи численного интегрирования.

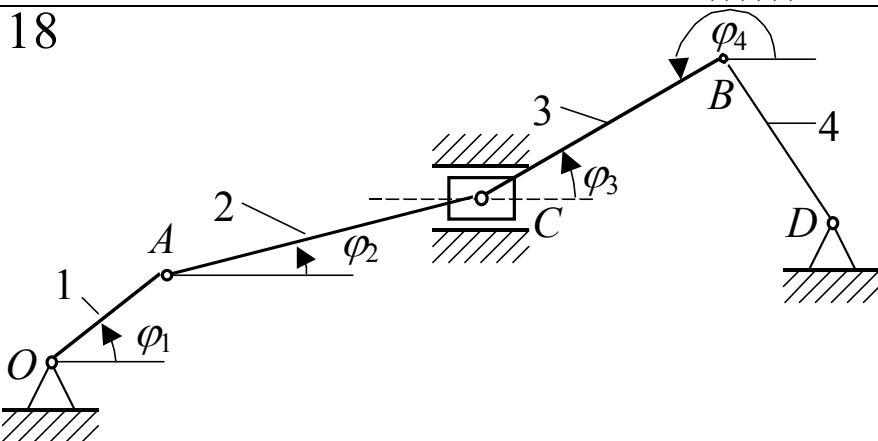
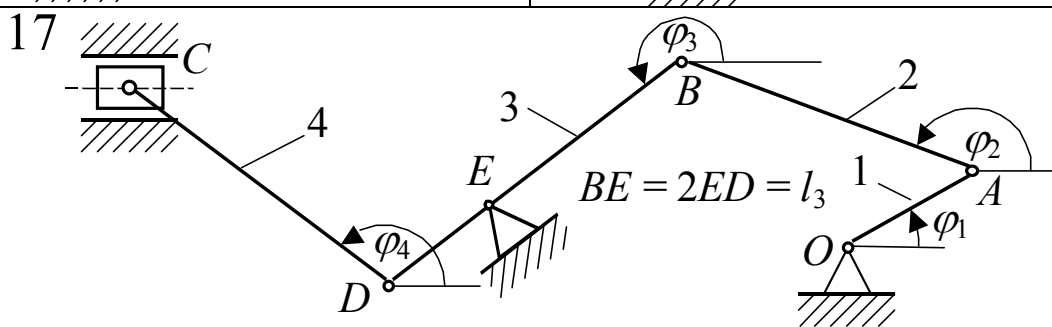
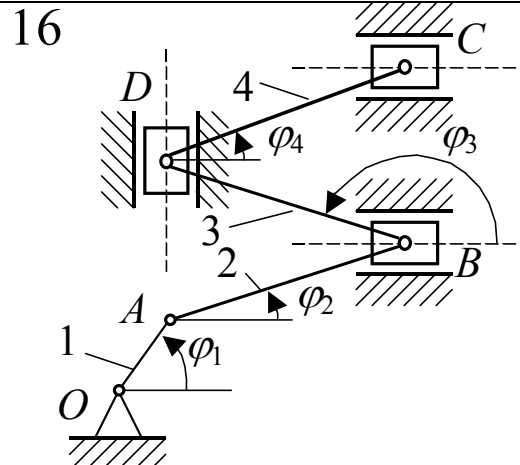
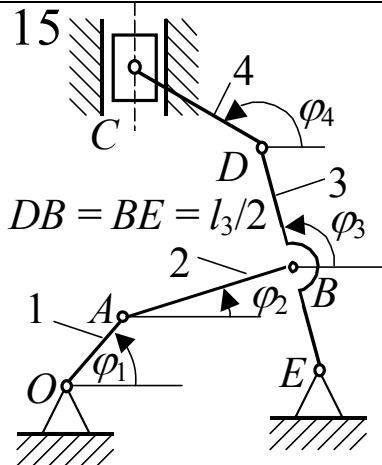
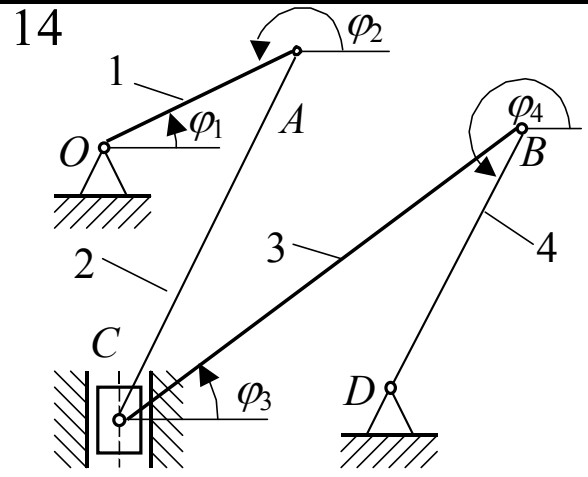
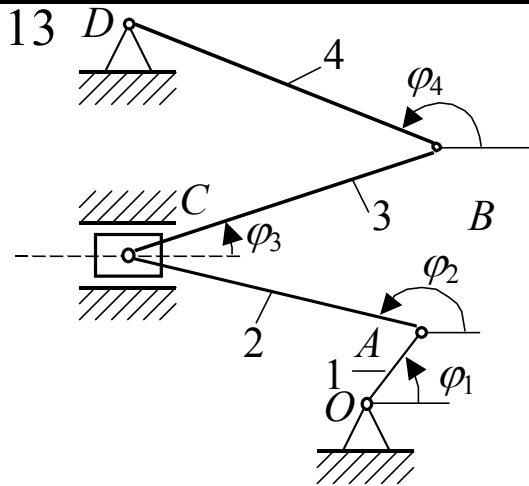
Табл. 2.1

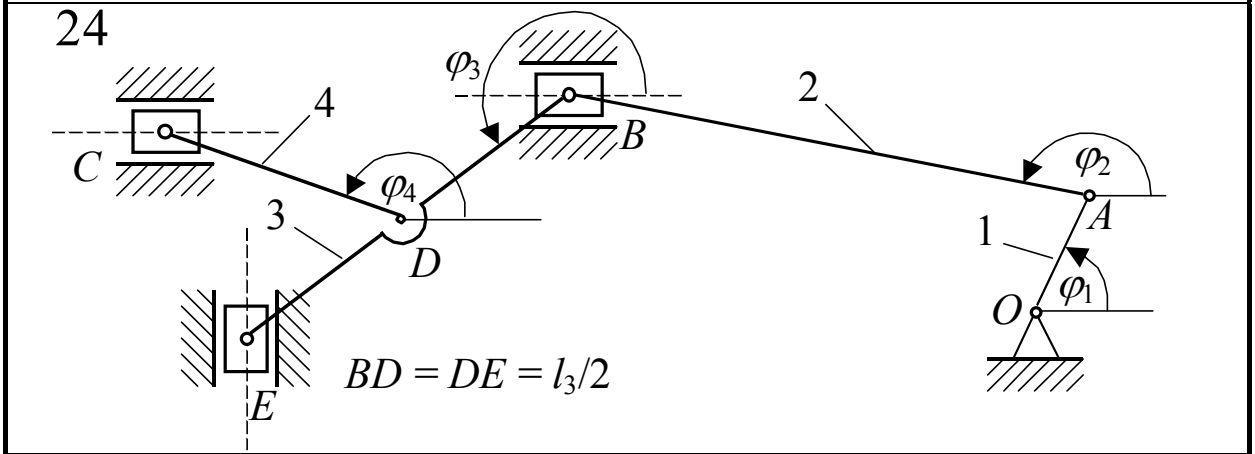
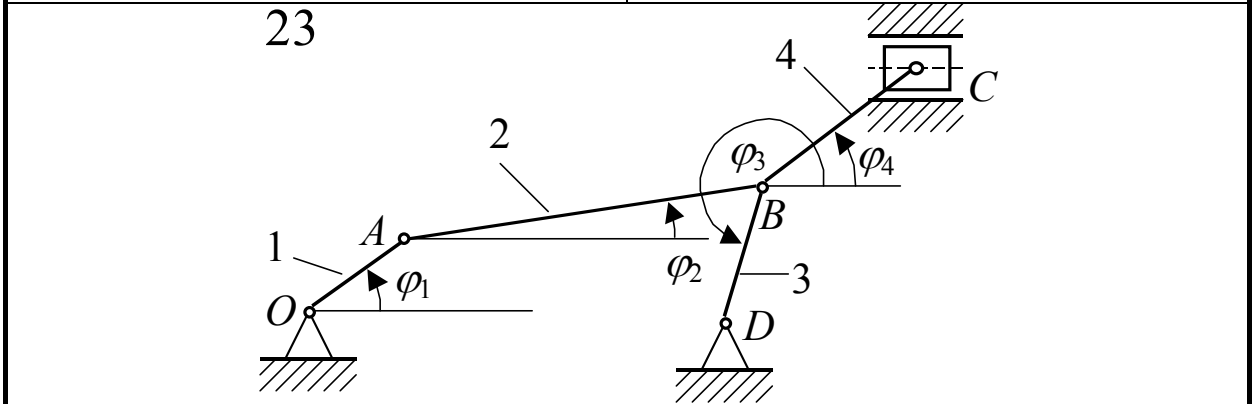
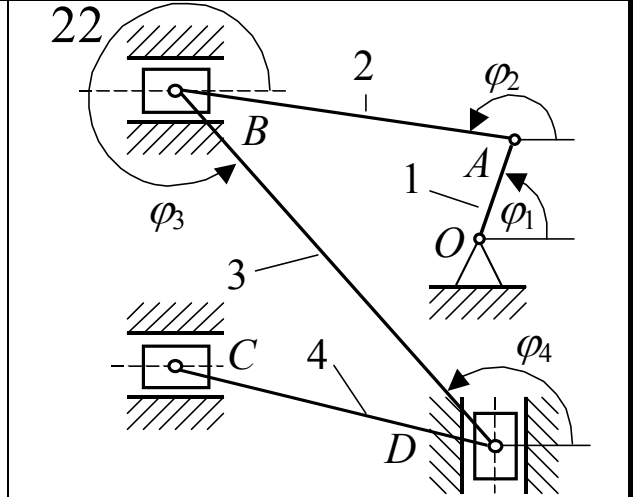
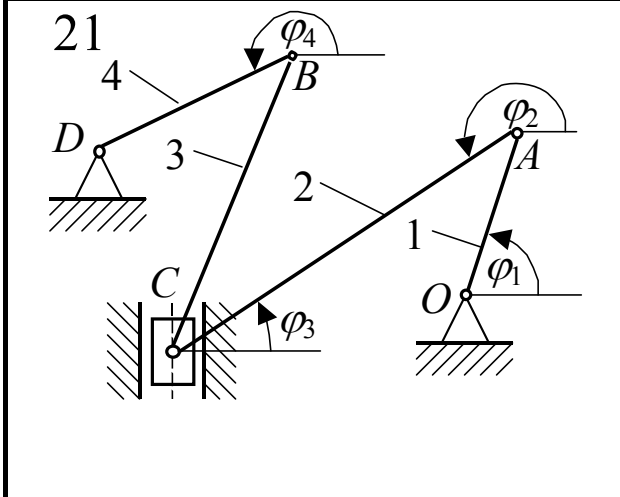
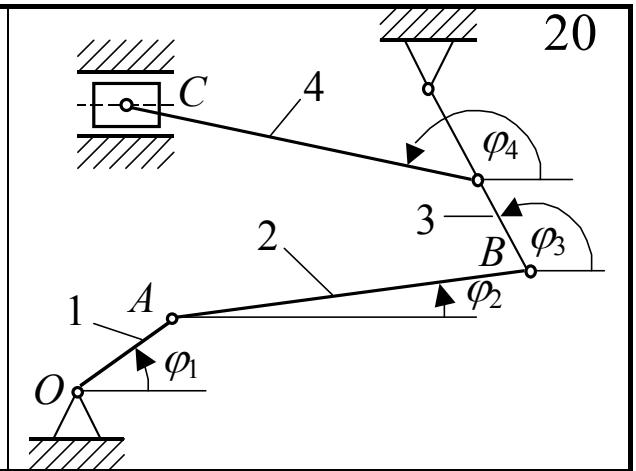
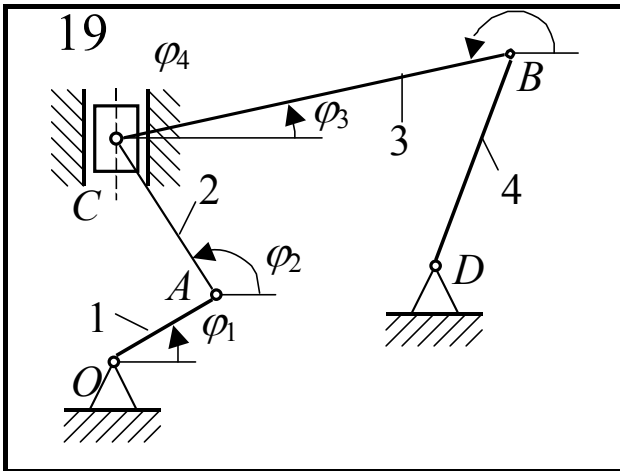
№	l_2 (м)	l_3 (м)	l_4 (м)	φ_{20} (рад)	φ_{30} (рад)	φ_{40} (рад)
1	1,00	1,00	1,00	0,50	4,70	5,70
2	1,00	1,00	1,00	0,70	5,30	2,60
3	1,00	0,80	1,00	2,10	0,70	5,20
4	1,50	1,50	1,00	2,80	3,60	5,70
5	1,00	1,00	1,00	5,50	3,90	3,60
6	1,00	1,00	0,80	0,50	2,60	1,20
7	1,00	1,20	0,80	0,50	1,90	3,50
8	1,00	1,80	0,80	0,50	2,10	3,60
9	1,00	0,50	1,00	2,60	3,90	0,50
10	1,00	0,80	1,00	2,60	4,20	0,50
11	1,00	0,50	1,00	0,50	4,10	1,70
12	1,00	1,00	0,80	0,70	5,00	0,50
13	1,00	1,20	1,00	2,60	0,70	3,10
14	1,00	1,50	0,50	4,20	0,70	4,70
15	1,00	0,50	1,00	0,50	1,50	2,00
16	1,00	1,20	1,00	0,50	2,30	0,30
17	1,00	0,80	1,00	2,60	3,90	2,60
18	1,00	1,00	0,80	0,50	0,50	5,20
19	1,00	1,00	0,50	2,10	0,50	4,70
20	1,00	1,00	0,80	0,50	2,00	2,60
21	1,00	1,00	0,80	3,90	1,00	3,10
22	1,00	1,20	0,80	2,40	5,00	2,60
23	1,00	0,50	1,00	0,50	0,50	0,30
24	1,00	1,40	0,80	2,60	3,90	2,60
25	0,80	1,60	1,00	0,70	1,60	0,50
26	1,60	0,80	1,00	1,80	5,50	5,30
27	1,00	1,00	0,50	0,50	0,50	4,10
28	1,00	1,20	0,50	0,50	2,60	4,10
29	0,80	1,40	1,00	0,50	1,50	2,60
30	1,20	0,80	1,00	2,50	1,00	5,70

Табл. 2.2

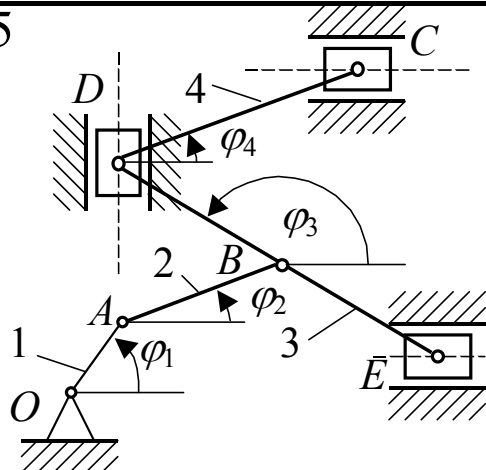




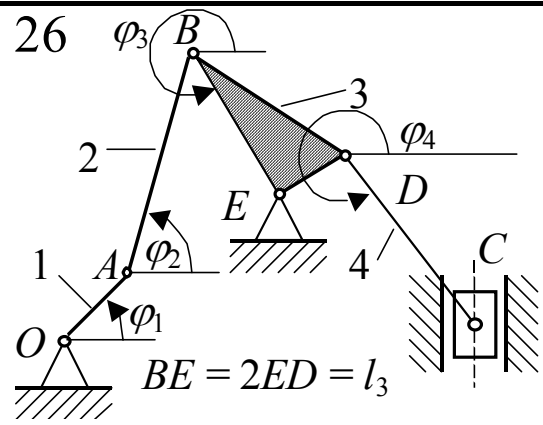




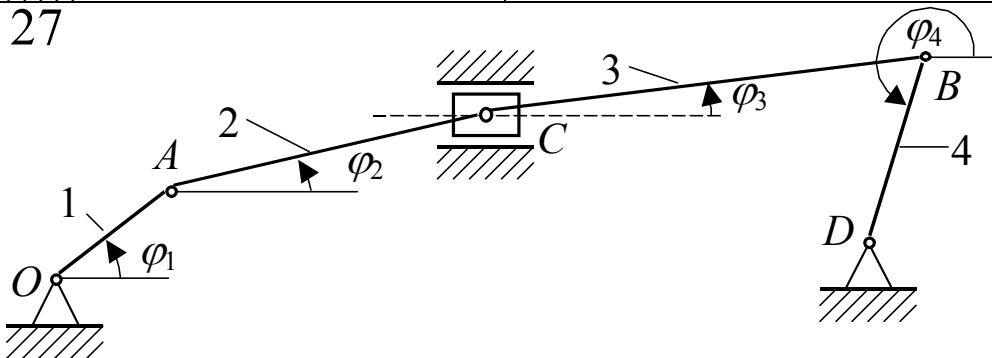
25



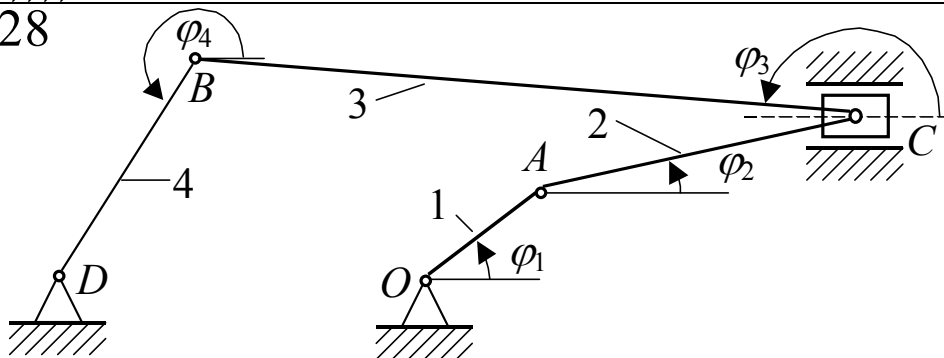
26



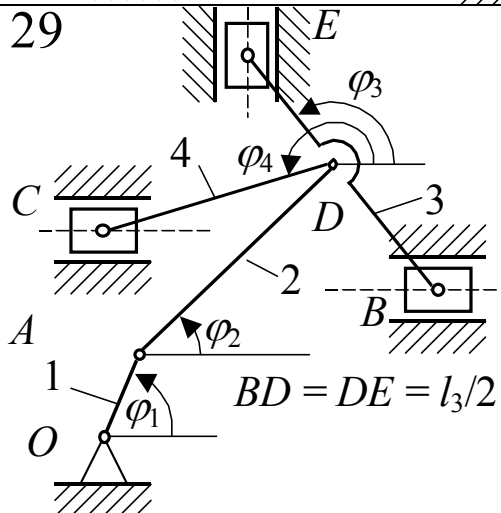
27



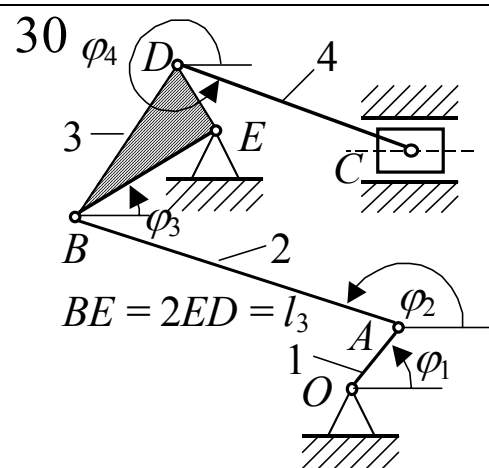
28



29



30



Приложение: текст документа MathCAD

$$l_1 := 0.5 \quad l_2 := 1 \quad l_3 := 1.2 \quad l_4 := 0.8$$

$$N := 100$$

$$t_0 := 0 \quad t_1 := 2 \cdot \pi$$

$$\varphi_{20} := 0.5 \quad \varphi_{30} := 1.9 \quad \varphi_{40} := 3.5$$

$$\varphi_1(t) := t$$

$$\xi := 0$$

$$\omega_1(t) := \frac{d}{d\xi} \varphi_1(t + \xi)$$

$$\omega_2(t, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) := \frac{-l_1 \cdot \cos(t)}{l_2 \cdot \cos(\varphi_2)}$$

$$\omega_3(t, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) := \frac{-l_1 \cdot \cos(\varphi_4) \cdot \sin(t - \varphi_2)}{l_3 \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_4)}$$

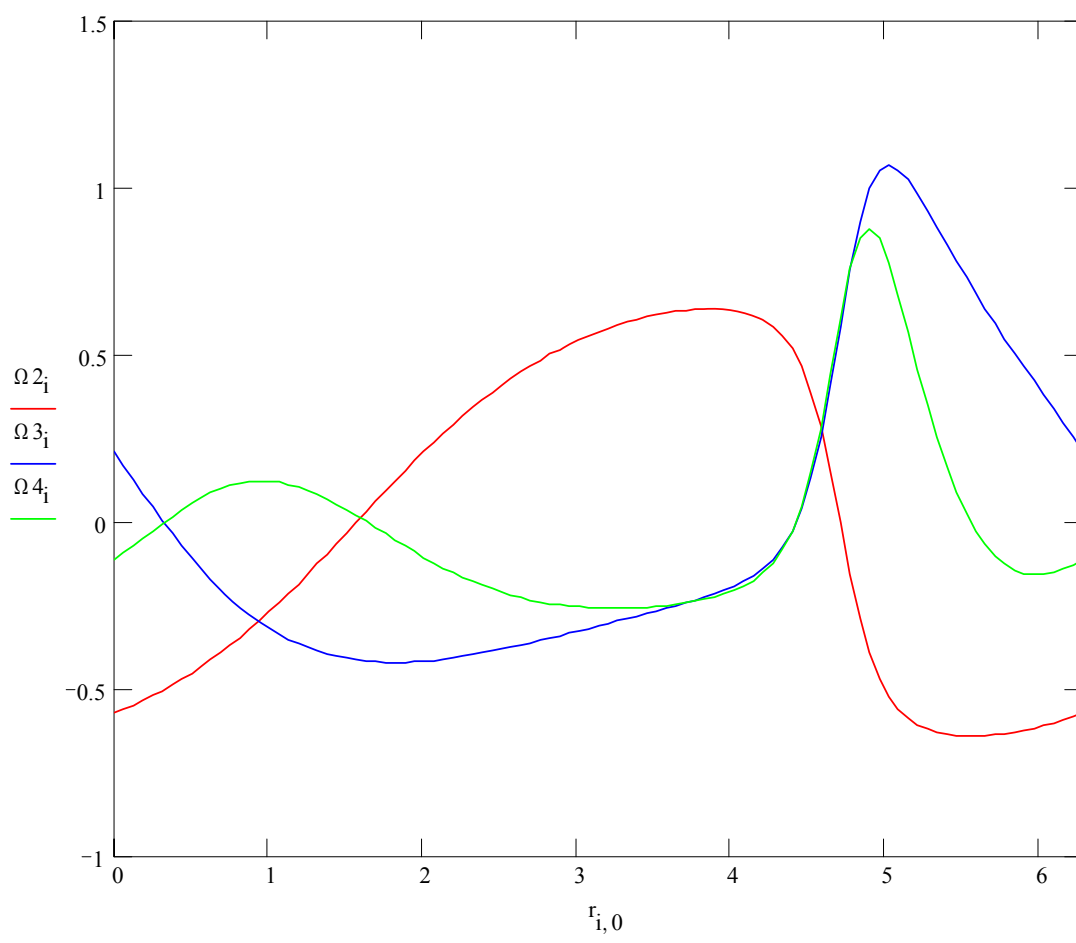
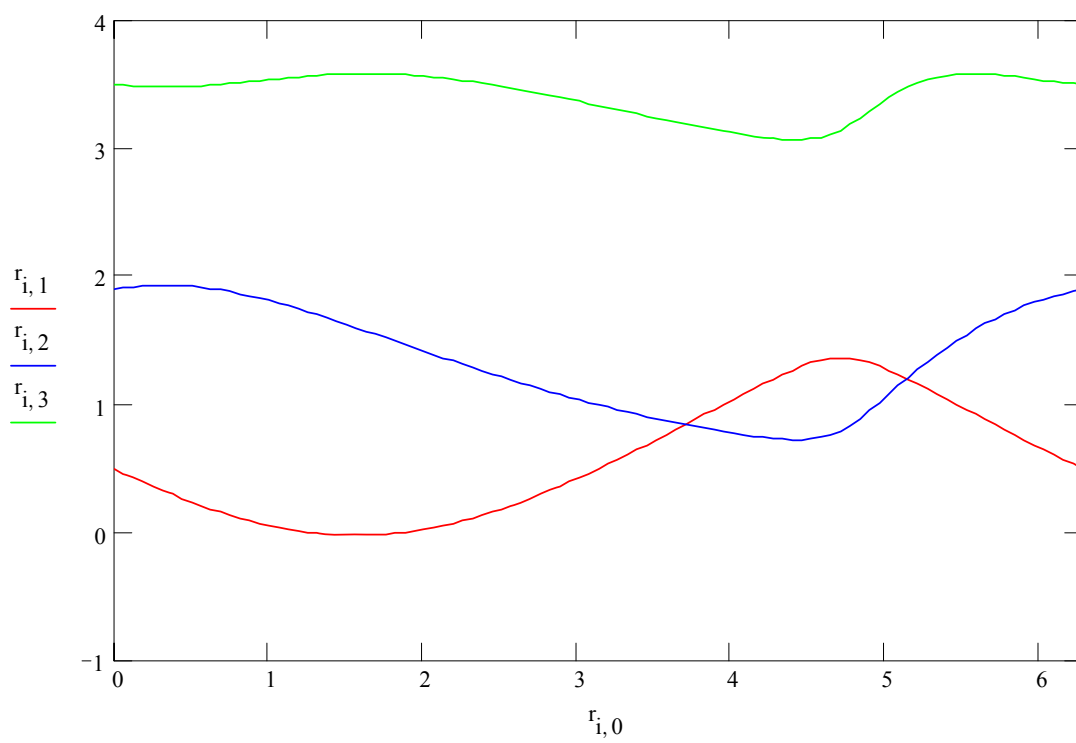
$$\omega_4(t, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) := \frac{l_1 \cdot \cos(\varphi_3) \cdot \sin(t - \varphi_2)}{l_4 \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_4)}$$

$$\varphi_0 := \begin{bmatrix} \varphi_{20} \\ \varphi_{30} \\ \varphi_{40} \end{bmatrix} \quad X(t, x) := \begin{bmatrix} \omega_2(t, x_0, x_1, x_2) \\ \omega_3(t, x_0, x_1, x_2) \\ \omega_4(t, x_0, x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

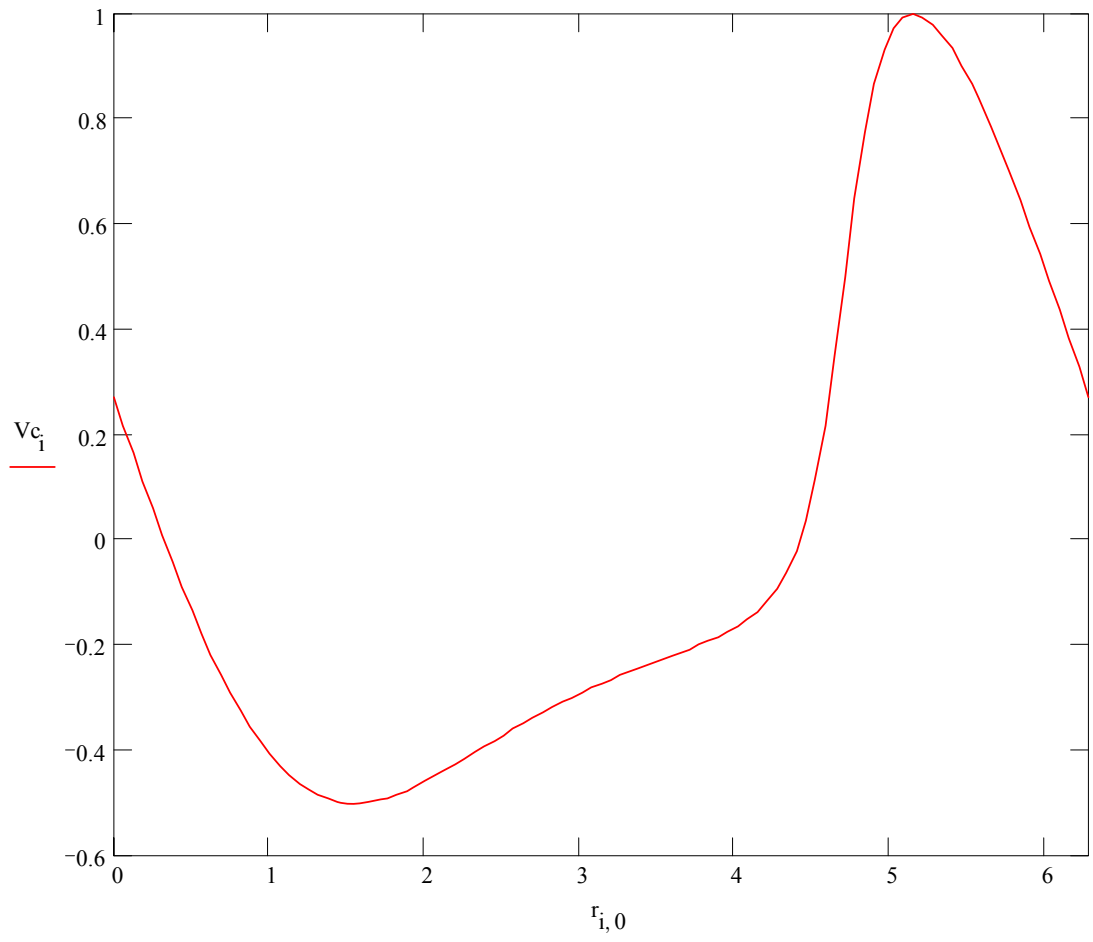
$$r := \text{rkfixed}(\varphi_0, t_0, t_1, N, X)$$

$$i := 0..N$$

$$\Omega_{2i} := \omega_2(r_{i,0}, r_{i,1}, r_{i,2}, r_{i,3}) \quad \Omega_{3i} := \omega_3(r_{i,0}, r_{i,1}, r_{i,2}, r_{i,3}) \quad \Omega_{4i} := \omega_4(r_{i,0}, r_{i,1}, r_{i,2}, r_{i,3})$$



$$V_{c_1} := 11 \cdot \frac{\sin(r_{i,1} - r_{i,0})}{\cos(r_{i,1})}$$



$r_{i,0}$	$r_{i,1}$	$r_{i,2}$	$r_{i,3}$	Ω_{2i}	Ω_{3i}	Ω_{4i}	V_{c_i}
0	0.5	1.9	3.5	-0.57	0.213	-0.11	0.273
0.062832	0.465	1.912	3.494	-0.558	0.171	-0.091	0.219
0.125664	0.43	1.922	3.489	-0.546	0.129	-0.071	0.165
0.188496	0.396	1.928	3.485	-0.532	0.088	-0.049	0.112
0.251327	0.363	1.933	3.482	-0.518	0.047	-0.026	0.06
0.314159	0.331	1.934	3.481	-0.503	0.007	-0.004	0.009
0.376991	0.3	1.933	3.482	-0.487	-0.032	0.018	-0.04
0.439823	0.27	1.93	3.484	-0.469	-0.069	0.039	-0.088
0.502655	0.241	1.925	3.487	-0.451	-0.104	0.058	-0.133
0.565487	0.213	1.917	3.491	-0.432	-0.138	0.075	-0.177
0.628319	0.187	1.907	3.496	-0.412	-0.17	0.09	-0.218
0.69115	0.161	1.896	3.502	-0.39	-0.2	0.102	-0.256
0.753982	0.138	1.882	3.509	-0.368	-0.227	0.112	-0.292
0.816814	0.115	1.867	3.516	-0.345	-0.253	0.119	-0.325
0.879646	0.094	1.851	3.524	-0.32	-0.276	0.123	-0.355
0.942478	0.075	1.833	3.532	-0.295	-0.297	0.125	-0.382
1.00531	0.057	1.813	3.539	-0.268	-0.316	0.124	-0.407
1.068142	0.041	1.793	3.547	-0.241	-0.333	0.12	-0.428
1.130973	0.027	1.772	3.554	-0.213	-0.349	0.114	-0.447
1.193805	0.015	1.749	3.561	-0.184	-0.362	0.106	-0.462
1.256637	0.004	1.726	3.568	-0.155	-0.374	0.095	-0.475
1.319469	-0.005	1.702	3.573	-0.124	-0.384	0.083	-0.485
1.382301	-0.012	1.678	3.578	-0.094	-0.393	0.069	-0.492
1.445133	-0.017	1.653	3.582	-0.063	-0.4	0.054	-0.497
1.507964	-0.02	1.628	3.585	-0.031	-0.406	0.038	-0.5
1.570796	-0.021	1.602	3.587	0	-0.411	0.021	-0.5
1.633628	-0.02	1.576	3.588	0.031	-0.414	0.004	-0.498
1.69646	-0.017	1.55	3.587	0.063	-0.417	-0.015	-0.495
1.759292	-0.012	1.524	3.586	0.094	-0.418	-0.033	-0.49
1.822124	-0.005	1.497	3.583	0.124	-0.419	-0.051	-0.484
1.884956	0.004	1.471	3.579	0.155	-0.418	-0.069	-0.476
1.947787	0.015	1.445	3.574	0.184	-0.417	-0.087	-0.468
2.010619	0.027	1.419	3.568	0.213	-0.415	-0.104	-0.458
2.073451	0.041	1.393	3.561	0.241	-0.413	-0.12	-0.448
2.136283	0.057	1.367	3.553	0.268	-0.409	-0.136	-0.438
2.199115	0.075	1.341	3.544	0.295	-0.405	-0.15	-0.427
2.261947	0.094	1.316	3.534	0.32	-0.401	-0.164	-0.415
2.324779	0.115	1.291	3.524	0.345	-0.396	-0.177	-0.404
2.38761	0.138	1.266	3.512	0.368	-0.391	-0.189	-0.393
2.450442	0.161	1.242	3.5	0.39	-0.385	-0.199	-0.381
2.513274	0.187	1.218	3.487	0.412	-0.379	-0.209	-0.37
2.576106	0.213	1.194	3.474	0.432	-0.373	-0.218	-0.359
2.638938	0.241	1.171	3.46	0.451	-0.366	-0.225	-0.349
2.70177	0.27	1.148	3.445	0.469	-0.36	-0.232	-0.338
2.764602	0.3	1.126	3.431	0.487	-0.353	-0.238	-0.328
2.827433	0.331	1.104	3.416	0.503	-0.346	-0.243	-0.318
2.890265	0.363	1.082	3.4	0.518	-0.339	-0.247	-0.308
2.953097	0.396	1.061	3.385	0.532	-0.331	-0.25	-0.299
3.015929	0.43	1.041	3.369	0.546	-0.324	-0.252	-0.29
3.078761	0.465	1.02	3.353	0.558	-0.317	-0.254	-0.281

$$r_{25,1} = -0.021$$

$$r_{25,2} = 1.602$$

$$r_{25,3} = 3.587$$

$$\Omega_{25} = 0$$

$$\Omega_{325} = -0.411$$

$$\Omega_{425} = 0.021$$

$$V_{c_{25}} = -0.5$$

